

# 基于非对称 GH-Copula 函数 推求珠海市设计暴雨过程线\*

陈子燊<sup>1,2</sup>, 李鸿皓<sup>3</sup>

(1. 中山大学新华学院, 广东 广州 510520;

2. 中山大学地理科学与规划学院, 广东 广州 510275;

3. 珠海市公共气象服务中心, 广东 珠海 51900)

**摘要:** 以 1961~2018 年珠海市气象站历年最大 1 h 雨量 (雨峰)、最大 6 h 雨量和最大 24 h 雨量为样本, 采用非对称 Gumbel-Hougaard(GH) Copula 分别构建 3 个时段雨量联合分布的典型暴雨过程线。研究结果有以下结论: 采用 3 个历时雨量联合分布推求的珠海设计暴雨值大于两个时段联合分布和单一时段设计暴雨值; 3 个时段雨量联合分布的“或”联合重现期更适用于应对城市雨洪风险; 按同频率放大的典型设计暴雨过程线可作为排水防涝工程设计的参考依据。

**关键词:** 非对称 GH-copula 函数; 设计暴雨过程线; “或”联合重现期

**中图分类号:** TV122 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 05-0095-07

## Design rainstorm hydrograph in Zhuhai city based on asymmetrical GH-copula

CHEN Zishen<sup>1,2</sup>, LI Honghao<sup>3</sup>

(1. Xinhua College of Sun Yat-sen University, Guangzhou 510520, China;

2. School of Geography and Planning, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

3. Zhuhai Public Meteorological Service Center, Zhuhai 519000, China)

**Abstract:** The maximum 1-hour rainfall (rain peak), maximum 6-hour rainfall and maximum 24-hour rainfall recorded at Zhuhai meteorological stations from 1961 to 2018 are taken as case study. The two typical rainstorm hydrographs of rainfall joint distribution with three time periods were constructed based on the asymmetric Archimedean Gumbel-Hougaard(GH) copula. The main conclusions were reached as follows: The designed rainstorm value in Zhuhai city calculated by using the combined distribution of three time periods of rainfall is larger than the designed rainstorm value of the combined distribution with two time periods and that of a single time period; The ‘OR’ joint return periods of rainfall in combined distribution of three time periods is more suitable for dealing with the flood risk of Zhuhai city. The designed typical rainstorm hydrographs amplified by the same frequency can be selected as the reference for the design of drainage and flood prevention engineering.

\* 收稿日期: 2020-02-03

**基金项目:** 国家自然科学基金 (41371498, 41771044); 广东省科学院发展专项资金项目 (2019GDASYL-0104003, 2020GDASYL-20200401001); 水利部珠江河口动力学及伴生过程调控重点实验室开放研究基金 ([2018] KJ08); 广东省科技计划项目 (2018B030324002)

**作者简介:** 陈子燊 (1952 年生), 男; **研究方向:** 极端水文事件与风险; E-mail: eesczs@mail.sysu.edu.cn

**Key words:** asymmetrical GH-copula; design rainstorm hydrograph; 'OR' return period

设计典型暴雨过程线是制定排水防洪系统设计时需要考虑的关键问题, 可为市政排水系统的规划和管理、与城市雨洪分析计算提供科学依据。一些研究人员从城市应对极端天气事件与防灾减灾的风险管理角度对雨型作了探索。蒋明<sup>[1]</sup>指出, 雨型是描述降雨过程和降雨强度在时间尺度上的分配过程, 是径流过程计算的基础。成丹等<sup>[2]</sup>把设计雨型作为制定排水防洪系统设计时的重要因素, 应用于城市市政排水系统的规划和管理及排水分析, 为城市流域雨洪调度计算提供科学依据。叶姗姗等<sup>[3]</sup>选取宿迁市实测的主副型雨峰偏后的暴雨雨型, 对其降雨过程进行同频率分时段缩放, 采用 Copula 函数的风险联合概率模型分析了不同的两时段之间出现的暴雨风险。杨星等<sup>[4]</sup>利用深圳雨量站 34 年实测逐时降雨资料, 对比了不同典型暴雨设计雨型研究方面的差异, 按构建的两变量 Copula 推求了深圳市不同重现期雨型的风险率和典型暴雨的特征。陈子燊等<sup>[5]</sup>使用珠海市 32 年不同历时暴雨组合推算排水排涝两级标准衔接的设计暴雨水平, 分析各历时暴雨组合的遭遇概率, 推算各组合的设计暴雨值。

Grimaldi & Serinresco<sup>[6]</sup>、Ganguli & Reddy<sup>[7]</sup>、Zhang & Singh<sup>[8]</sup>、陈子燊等<sup>[9]</sup>分别采用非对称的阿基米德 Copulas 构建了不对称三变量洪水要素联

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2), \dots, F_{x_n}(x_n)) = C(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (1)$$

利用 Copula 函数构造联合概率分布, 使得变量的所有信息都存在于边缘分布函数里, 不会在转换过程中产生信息失真。因此, Copula 函数理论是构建多变量水文联合概率分布的理想工具。

$$C(u_1, u_2, u_3) = \varphi_\theta^{-1}[\varphi_\theta(u_1) + \varphi_\theta(u_2) + \varphi_\theta(u_3)] \quad (2)$$

式中,  $u_1, u_2, u_3$  为边缘分布,  $u_1 = F_{x_1}(x_1), u_2 = F_{x_2}(x_2), u_3 = F_{x_3}(x_3), u_1, u_2, u_3 \in [0, 1]$ ;  $\varphi_\theta$  为 Ar-

合分布模型推算设计洪水, 尝试应用于洪水风险规划管理。肖义等<sup>[10]</sup>、李天元等<sup>[11]</sup>则分别采用两变量和三变量的 Copula 函数建立了联合分布的设计洪水过程线的推求方法, 为城市设计暴雨过程线提供了一种新思路。

华南雨水非常丰沛, 汛期降雨可分为以锋面雨为主的前汛期与台风雨为主的后汛期。由于城市化进程加速, 城市建设管网等排水系统滞后于城市发展, 设计标准偏低, 导致城市排水系统的排洪能力低下。近年来一些城市内涝问题日显突出, 衍生的灾害对城市经济社会发展带来了重大的负面影响。本研究以珠海市近数十年来的逐时雨量数据, 采用非对称阿基米德 Copulas (Asymmetric Archimedean Copulas) 构建典型设计暴雨过程线, 可为城市防洪排涝工程设计和防灾减灾的风险管理提出新思路。

## 1 三变量 Copula 函数

### 1.1 Copula 函数的定义

设随机变量  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的边缘分布函数分别为  $F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i)$ , 其中  $n$  为随机变量的个数,  $x_i$  为随机变量  $X_i$  的值。依 Sklar 理论, 对于连续分布函数  $F_{X_i}(x_i)$ , 存在唯一的联合分布函数<sup>[12]</sup>:

### 1.2 三变量 Archimedean Copula

三变量对称的 Archimedean Copula 单参数形式<sup>[13]</sup>为:

$$C(u_1, u_2, u_3) = \exp\left\{\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta + (-\ln u_3)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta_1}}\right\}, \quad \theta \in [1, \infty) \quad (3)$$

三变量非对称 Archimedean Copula 两参数形式为<sup>[13]</sup>:

$$C(u_1, u_2, u_3) = C_1(u_3, C_2(u_1, u_2)) = \varphi_1^{-1}\left(\varphi_1(u_3) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\left(\varphi_2(u_2) + \varphi_2(u_1)\right)\right) \quad (4)$$

式中, 符号“ $\circ$ ”表示函数组合。非对称的 GH-Copula 为:

$$C(u_1, u_2, u_3) = \exp\left\{-\left[\left[(-\ln u_1)^{\theta_2} + (-\ln u_2)^{\theta_2}\right]^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + (-\ln u_3)^{\theta_1}\right]^{\frac{1}{\theta_1}}\right\}, \quad \theta_2 > \theta_1 \in [1, \infty) \quad (5)$$

### 2.3 三变量联合重现期

以算符“ $\vee$ ”定义“或”三维极端事件中至少有一个被超过情况下的“或”联合重现期为:

$$T_{u_1, u_2, u_3}^{\vee} = \frac{1}{P(X_1 > x_1 \vee X_2 > x_2 \vee X_3 > x_3)} = \frac{1}{1 - C(u_1, u_2, u_3)} \quad (6)$$

以“ $\wedge$ ”定义“且”三维极端事件同时被超过情况下的“且”联合重现期为:

$$T_{u_1, u_2, u_3}^{\wedge} = \frac{1}{P(X_1 \geq x_1 \wedge X_2 \geq x_2 \wedge X_3 \geq x_3)} = \frac{1}{1 - u_1 - u_2 - u_3 + C(u_1, u_2) + C(u_1, u_3) + C(u_2, u_3) - C(u_1, u_2, u_3)} \quad (7)$$

## 3 实例研究

### 3.1 基本数据

本文根据珠海市气象站 1961~2018 年逐时降水记录数据, 在提取历年最大 24 h 雨量基础上, 再分别提取雨峰和连续最大 6 h 雨量数据, 构成最大 1 h 雨量 ( $R_1$ )、最大 6 h 雨量 ( $R_6$ ) 和最大 24 h 雨量 ( $R_{24}$ ) 作为分析样本。其中, 珠海最大 24 h 出现在 2000 年 4 月 13 日 19 时~4 月 14 日 18 时, 累计降雨 630.3 mm, 出现在第 13 h 的雨峰, 雨量为

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 - \xi\left(\frac{z - \mu}{\beta}\right)\right]^{1/\xi}\right\}, & \xi \neq 0 \\ \exp\left[-\exp\left(\left(\frac{z - \mu}{\beta}\right)\right)\right], & \xi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $\xi, \beta, \mu$  分别为形态参数、尺度参数和位置参数。

采用广义极值分布 (GEV) 对  $R_1$ 、 $R_6$  和  $R_{24}$  样本加以拟合。参数估计使用线性矩 (L-矩) 方法。经验频率分布使用 Gringorten 公式计算。拟合结果采用均方根误差 (RMSE) 和概率点据相关系数 (PPCC) 检验其拟合优度。拟合结果 (表 1) 表明, GEV 分布适用于 3 个极端降雨尺度  $R_1$ 、 $R_6$  和  $R_{24}$  的边缘分布。

计算的  $R_1$ 、 $R_6$  和  $R_{24}$  两两间的 Kendall 相关系数

表 1 三变量暴雨样本的 GEV 分布参数与优度检验值

Table 1 The parameters of the marginal distribution and the values of goodness of fit test

样本	位置参数	尺度参数	形态参数	RMSE	PPCC
$R_1$	43.194	19.173	0.028	2.441	0.994
$R_6$	110.069	42.470	-0.166	9.790	0.990
$R_{24}$	175.614	53.748	-0.211	16.960	0.986

89.3 mm。次最大 24 h 雨量出现在 1994 年 7 月 22 日 7 时~7 月 22 日 6 时, 累计降雨 572.6 mm, 雨峰靠前, 出现在第 4 h, 雨量 102 mm。二者分别作为前汛期和后汛期的代表性极端降水过程, 以此构建 2000 年和 1994 年 3 个时段雨量联合分布的两场典型设计暴雨过程线。

### 3.2 边缘分布与联合分布

三个样本的边缘分布均采用广义极值 (GEV) 分布函数:

表明不同历时暴雨间存在较高的相关性, 其中  $R_1$  和  $R_6$  最大,  $\tau = 0.576$ ;  $R_1$  和  $R_{24}$  之间的相关系数为 0.303;  $R_6$  和  $R_{24}$  相关系数为 0.543。采用 Kendall 相关系数与 Copula 参数的关系式, 构建非对称三变量 GH-Copula<sup>[10]</sup>。为了对比, 通过 MLM 法计算了三变量对称 GH-Copula 的参数  $\theta$ 。采用 Akaike 信息准则 (AIC) 和最小 OLS 准则验证理论联合分布函数与经验联合分布函数的拟合程度, 结果见表 2。可见以二维 GH-Copula 的三维非对称形式的 GH-Copula 的 OLS 和 AIC 值最小, 表明非对称 Copula 略优。Nelson<sup>[12]</sup> 和 Salvadori 等<sup>[13]</sup> 证明当且仅当边缘分布和 Copula 函数均为极值分布时, 构造的联合分布才是极值分布, 而 GH-Copula 是 Archimedean copula 函数族中的唯一多变量极值 Copula 函数, 适用于极端事件的频率分析。考虑到  $R_1$ 、 $R_6$  和  $R_{24}$  之间的相关性存在较大差别, 因此选用非对称 GH-Copula 构建珠海雨量站历年最大 24 h 暴雨量三个历时  $R_1$ 、 $R_6$  和  $R_{24}$  之间的联合分布:

$$C(u_1, u_2, u_3) = \exp\left\{-\left(\left[(-\ln u_1)^{2.361} + (-\ln u_2)^{2.361}\right]^{1.797/2.361} + (-\ln u_3)^{1.797}\right)^{1/1.797}\right\} \quad (9)$$

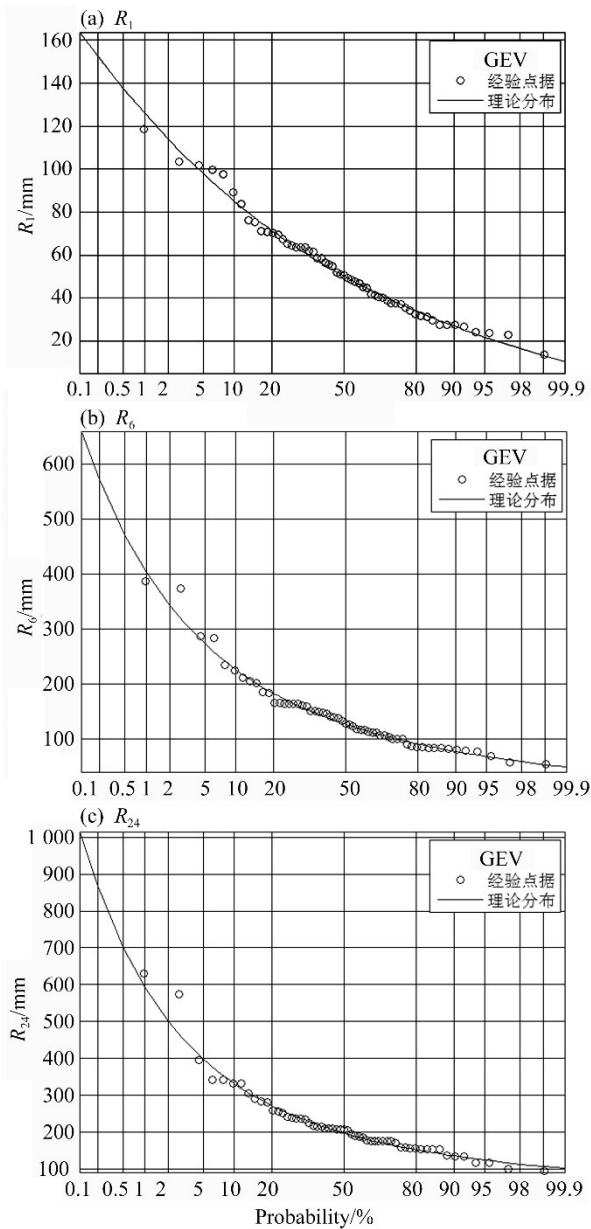


图1 降雨尺度 $R_1$ 、 $R_6$ 和 $R_{24}$ 的GEV分布

Fig. 1 GEV distribution of  $R_1$ ,  $R_6$  and  $R_{24}$  rainfall scales

表2 非对称和对称三维GH-Copula参数估计及拟合优度评价

Table 2 Results of parameter estimation and goodness of fit tests for three dimensional asymmetric and symmetric GH-Copulas

非对称型				对称型		
$\theta_1$	$\theta_2$	OLS	AIC	$\theta$	OLS	AIC
1.797	2.361	0.031	-170	1.910	0.033	-167

### 3.4 典型设计暴雨过程线

典型暴雨过程线的选择采用以下原则：

- 1) 分别选择峰高量大具有一定代表性的实测暴雨过程线暴雨过程；
- 2) 设计暴雨过程线采用同频率

放大法，以降水主峰对城市内涝形成为首要影响因素，选定时段为1 h的设计雨峰作为设计标准，放大出来的过程线形状能与原来的典型过程一致。

珠海前、后汛期典型年的24 h暴雨过程线如图2显示，1994年最大24 h暴雨过程存在主副峰，主峰靠前。2000年最大24 h暴雨过程同样为主副峰雨型，主峰大致位于最大24 h暴雨的中间时刻。两个典型暴雨 $R_1$ 、 $R_6$ 、 $R_{24}$ 3个时段最大降水量及重现期见表3。

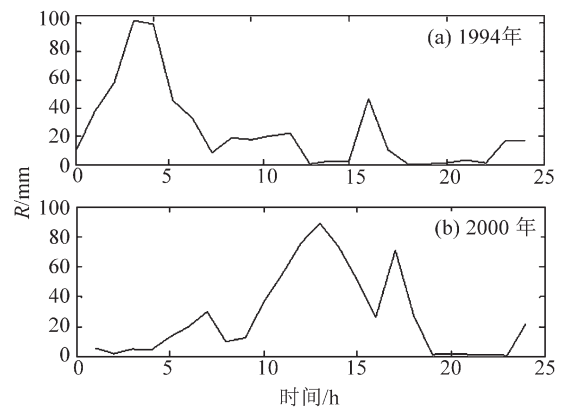


图2 两个典型年暴雨过程

Fig. 2 Rainstorm hydrograph of two typical year

从表3可见，1994年和2000年的 $R_1$ - $R_6$ - $R_{24}$ 组合雨量的“或”联合重现期小于单一时段雨量重现期，此说明考虑多时段组合条件下单一时段雨量即可致灾的可能性最高，同时出现三时段组合雨量的“且”联合重现期明显超过“或”联合重现期，属于可能性小的事件。表4为不同时段雨量组合的“或”联合重现期，同样可见同频率下 $R_1$ - $R_6$ - $R_{24}$ 三时段组合雨量的“或”联合重现期小于两时段组合雨量的“或”联合重现期。因此，如果以三时段雨量组合的“或”联合重现期更适用于应对珠海市的内涝风险。

### 3.5 同频率法推求设计暴雨过程线

按照同频率放大法的思路，假定3个时段降雨变量 $R_1$ 、 $R_6$ 、 $R_{24}$ 同频率，令 $u_1 = u_2 = u_3$ ，可得到基于某一联合重现期 $T_{u_1, u_2, u_3}$ 的频率组合 $(u_1, u_2, u_3)$ 。根据此组合，按照各变量的边缘分布函数反推可得到三变量不同时段雨量的联合设计值组合 $(r_1, r_2, r_3)$ ，再以此设计值组合放大典型暴雨过程，即得到基于三变量联合分布的设计暴雨过程线。非对称GH-Copula推算的 $R_1$ 、 $R_6$ 、 $R_{24}$ 三变量同频率分布联合设计值为<sup>[10]</sup>：

表3 两个典型年 $R_1, R_6, R_{24}$ 最大降水量及重现期  
Table 3 Maximum precipitation and return period of  $R_1, R_6, R_{24}$  of two typical years

典型年	$R_1$		$R_6$		$R_{24}$		$R_1-R_6-R_{24}$	
	$R_1/\text{mm}$	重现期/a	$R_6/\text{mm}$	重现期/a	$R_{24}/\text{mm}$	重现期/a	“或”重现期/a	“且”重现期/a
1994	102.0	25.2	374.2	72.1	572.6	86.2	22.7	152.8
2000	89.3	12.6	386.7	83.1	630.3	128.6	12.3	193.0

表4 不同时段雨量组合的“或”联合重现期  
Table 4 ‘OR’ joint return periods of rainstorm in different time interval

重现期/a	“或”联合重现期/a			
	$R_1-R_6$	$R_1-R_{24}$	$R_6-R_{24}$	$R_1-R_6-R_{24}$
200	149.2	123.6	145.8	115.4
100	74.7	61.9	73.0	57.8
50	37.4	31.0	36.5	29.0
20	15.0	12.5	14.7	11.7
10	7.6	6.4	7.4	6.0

$$u_1 = u_2 = u_3 = \left[ 1 - \left( 1/T_{u_1, u_2, u_3} \right)^\alpha \right]; r_1 = F^{-1}(u_1), r_2 = F^{-1}(u_2), r_3 = F^{-1}(u_3) \quad (10)$$

式中,  $\alpha = (2^{\theta_1/\theta_2} + 1)^{-1/\theta_1}$ ;  $F_{u_i}^{-1}(u_i)$ 为边缘分布函数的反函数。

同理可分别推算两变量  $(u_1, u_2)$  的  $T_{u_1, u_2}$  和  $(u_1, u_3)$  的  $T_{u_1, u_3}$  的同频率联合设计值。

选取当地实测的典型暴雨, 对其降雨过程线进行同频率分时段缩放。放大系数公式  $K = X_{\text{设计}}/X_{\text{典型}}$ 。式中  $X_{\text{设计}}$  为不同重现期的设计降雨量;  $X_{\text{典型}}$  为典型暴雨降雨量。以雨峰同频率放大方法求重现期200年 ( $P=0.05\%$ )  $R_1-R_6-R_{24}$  三时段联合分布的设计暴雨过程线。为了比较, 另推求了  $R_1-R_6$  和  $R_1-R_{24}$  两变量联合分布以及以雨峰  $R_1$  单变量同频率放大的设计暴雨过程线 (图3)。多变量同频率设计值计算结果见表5。

多变量方法与单变量方法所推求的200年一遇设计暴雨过程线的比较显示, 考虑了变量之间的相关性的多变量联合重现期设计值大于单变量同频率设计值, 即多变量方法放大的过程线对于城市防雨洪设计偏安全或保险。以多变量联合重现期作为城市排水防涝标准更安全, 传统的单变量同频率方法则达不到标准。因此, 得到的典型设计暴雨过程线更符合城市水文的内在规律和排水防涝工程设计的要 求, 由此设计的暴雨过程线更适用于应对城市内涝风险。

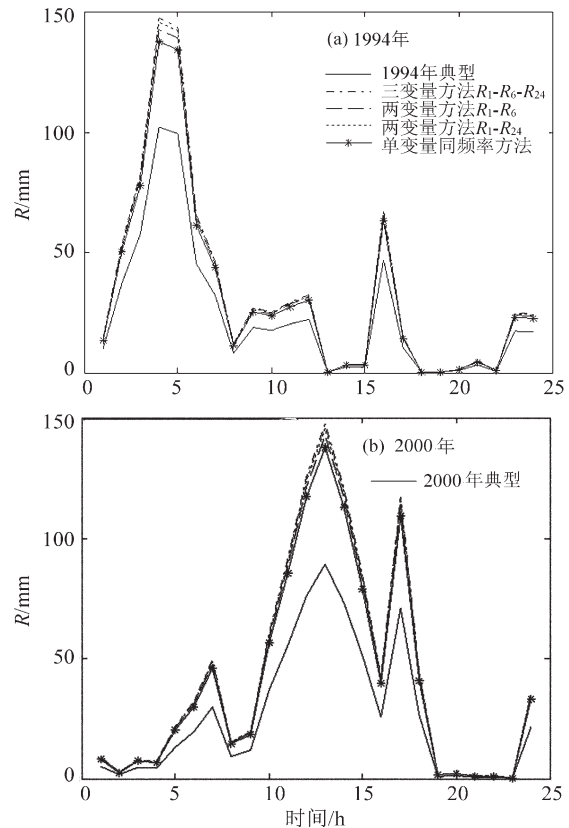


图3 典型暴雨三时段组合、两时段组合和单一时段方法推求的200年一遇设计暴雨过程线的对比

Fig. 3 Comparison among the design rainstorm hydrograph with return period 200 years of a typical rainstorm to three and two durations

表 5 单变量暴雨设计值和多变量同频率联合设计值  
Table 5 Univariate and multivariate storm design value combined with same frequency

雨量样本组合	重现期/a	$R_1$ /mm	$R_6$ /mm	$R_{24}$ /mm
$R_1-R_6-R_{24}$	200	147.4	535.4	805.1
	100	136.0	461.0	684.3
	50	124.3	394.6	579.7
	20	108.4	317.1	462.1
	10	95.7	265.0	385.8
$R_1-R_6$	200	142.4	501.5	-
	100	130.9	430.9	-
	50	119.1	367.7	-
	20	103.0	294.1	-
	10	90.3	244.5	-
$R_1-R_{24}$	200	145.5	-	783.4
	100	134.1	-	665.6
	50	122.3	-	563.6
	20	106.3	-	448.8
	10	93.7	-	374.4
$R_6-R_{24}$	200	-	504.1	753.7
	100	-	433.1	640.0
	50	-	369.7	541.4
	20	-	295.8	430.6
	10	-	246.1	358.8
$R_1/R_6/R_{24}$	200	137.6	470.7	699.8
	100	126.0	403.4	593.4
	50	114.1	343.3	501.3
	20	97.8	273.2	397.6
	10	85.0	226.0	330.4

## 4 结 论

本文将不同历时雨量之间具有相关关系的暴雨过程简化为雨峰、6 h 雨量和 24 h 雨量三变量联合分布, 采用非对称 GH-copula 构建珠海市典型暴雨过程线, 并与由两个时段和由单一雨峰的同频率设计暴雨过程线方法进行了比较。研究结果有以下结论:

1) 多变量联合分布模型合理地拓展了 Copula 函数在城市水文工程中的实际应用。1994 年和 2000 年两个典型年的  $R_1-R_6-R_{24}$  三个时段雨量联合分布的“或”联合重现期都小于单一时段雨量重

现期, 危险率最大。三个时段雨量联合分布的“或”联合重现期更适用于应对城市雨洪风险。

2) 采用三个历时雨量联合分布推求的珠海市设计暴雨值大于两个时段和单一时段设计暴雨值, 由此放大的设计暴雨过程线, 整体效果相对最优, 对设计暴雨过程线的研究方法提供了新思路。按同频率放大的典型设计暴雨过程线可作为前汛期和后汛期排水防涝工程设计的参考依据。

3) 与 1994 年主峰靠前的暴雨过程比较, 主峰居中的 2000 年的暴雨过程危险率更大, 对珠海市内涝具有更大的威胁, 构建的典型设计暴雨过程线更具代表性。

## 参考文献:

- [1] 蒋明. 新暴雨形势下上海市设计暴雨雨型研究[J]. 湖南理工学院学报, 2015, 28(2): 69-73.  
JIANG M. Study of Shanghai design rainstorm profile under the new rainstorm situation[J]. J Hunan Institute of Science and Technology (Natural Sciences), 2015, 28(2): 69-73.
- [2] 成丹, 陈正洪, 方怡. 宜昌市区短历时暴雨雨型特征[J]. 暴雨灾害, 2015, 34(3): 249-253.  
CHENG D, CHEN Z H, FANG Y. The analysis of the designed storm pattern over Yichang [J]. *Torrential Rain and Disasters*, 2015, 34(3): 249-253.
- [3] 叶姗姗, 叶兴成, 王以超, 等. 基于Copula函数的设计暴雨雨型研究[J]. 水资源与水工程学报, 2018, 29(3): 63-68.  
YE S S, YE X C, WANG Y C, et al. Research on design rainstorm pattern based on Copula function [J]. *Journal of Water Resources & Water Engineering*, 2018, 29(3): 63-68.
- [4] 杨星, 朱大栋, 李朝方, 等. 按风险率模型分析的设计雨型[J]. 水利学报, 2013, 44(5): 542-548.  
YANG X, ZHU D D, LI C F, et al. Establishment of design hyetographs based on risk probability models[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2013, 44(5): 542-548.
- [5] 陈子桑, 高时友, 李鸿皓. 基于二次重现期的城市两级排涝标准衔接的设计暴雨[J]. 水科学进展, 2017, 28(3): 382-391.  
CHEN Z S, GAO S Y, LI H H. Design rainstorm quantiles for connecting two-level urban drainage standards based on secondary return period[J]. *Advances in Water Science*, 2017, 28(3): 382-391.
- [6] GRIMALDI S, SERINCESCO F. Asymmetric Copula in multivariate flood frequency analysis [J]. *Advances in Water Resources*, 2006, 29(8): 150-164.
- [7] GANGULI P, REDDY M. Probabilistic assessment of flood risks using trivariate copulas [J]. *Theor Appl Climatol*, 2013, 111: 341-360.
- [8] ZHANG L, SINGH V P. Trivariate flood frequency analysis using the Gumbel-Hougaard Copula [J]. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2007, 12(4): 431-439.
- [9] 陈子桑, 黄强, 刘曾美. 基于非对称 Archimedean Copula 的三变量洪水风险评估[J]. 水科学进展, 2016, 27(5): 763-771.  
CHEN Z S, HUANG Q, LIU Z M. Risk assessment of trivariate flood based on asymmetric Archimedean copulas [J]. *Advances in Water Science*, 2016, 27(5): 763-771.
- [10] 肖义, 郭生练, 刘攀, 等. 分期设计洪水频率与防洪标准关系研究[J]. 水科学进展, 2008, 19(1): 54-60.  
XIAO Y, GUO S L, LIU P, et al. Seasonal flood frequency analysis and flood prevention standard [J]. *Advances in Water Science*, 2008, 19(1): 54-60.
- [11] 李天元, 郭生练, 闫宝伟, 等. 基于多变量联合分布推求设计洪水过程线的新方法[J]. 水力发电学报, 2013, 32(3): 10-15.  
LI T Y, GUO S L, YAN B W, et al. Derivative design flood hydrograph based on trivariate joint distribution [J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2013, 32(3): 10-15.
- [12] NELSON R B. An introduction to copulas [M]. New York: Springer, 2006.
- [13] SALVADORI G, De MICHELE C. Multivariate multi-parameter extreme value models and return periods: A copula approach [J]. *Water Resource Research*, 2010, 46, W10501, doi:10.1029/2009WR009040.

(责任编辑 秦社彩)